

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НАДЗЕМНОЇ ДІЛЯНКИ МАГІСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДУ ПІСЛЯ ПРОХОДЖЕННЯ ПО НІЙ ОЧИСНОГО ЧИ ДІАГНОСТИЧНОГО ПОРШНЯ

В. Я. Грудз, Т. Ф. Тутко, Т. Ю. Пиріг

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, Карпатська 15,  
e-mail: public@nimg.edu.ua

*Розв'язано крайову задачу з визначення вільних коливань надземної ділянки газопроводу, які виникають у результаті проходження очисного (діагностичного) поршня. Граничні умови у цій задачі відповідають заземленню кінців ділянки газопроводу. Початкові умови отримано із розв'язку задачі вимушених коливань цієї ж надземної ділянки газопроводу, що зумовлені рухом очисного (діагностичного) поршня усередині газопроводу. Така задача була розв'язана раніше при використанні інтегрального перетворення Лапласа з урахуванням початкового прогину ділянки газопроводу під дією її власної ваги. Отриманий розв'язок такої задачі є сумою подвійних інтегралів та декількох простих доданків. Шуканий розв'язок задачі вільних коливань надземної ділянки газопроводу подано як добуток двох функцій. Перша з них є функцією тільки координати газопроводу, а друга – функцією часу. Перша функція являє собою суму добутоків невідомих коефіцієнтів, що знаходилися за відомими граничними умовами задачі, і функцій Крилова, в які входять корені характеристичного рівняння. Вона є власною функцією і характеризує собою форму вільних коливань ділянки газопроводу. Таких функцій існує безліч, оскільки є безліч коренів частотного рівняння. У другій функції при косинусах і синусах стоять невідомі коефіцієнти, що знаходяться за заданими початковими умовами задачі. Обчислення цих коефіцієнтів пов'язане із знаходженням інтегралів від добутку функцій початкових умов та власних функцій. Оскільки функції початкових умов задачі є складними і являють собою суму подвійних інтегралів та деяких простих функцій, то для полегшення обчислення вказаних коефіцієнтів використано інтерполяційні многочлени Лагранжа. На довжині ділянки газопроводу 100 м числові значення інтерполяційних многочленів співпадають з функціями початкових умов у 12 точках (враховуючи і крайні точки 0 і 100 м).*

Ключові слова: вільні коливання, надземна ділянка газопроводу, власні функції, корені характеристичного рівняння, інтерполяційні многочлени Лагранжа.

*Решена краевая задача по определению свободных колебаний надземного участка газопровода, возникающих в результате прохождения очистного (диагностического) поршня. Граничные условия в этой задаче соответствуют заземлению концов участка газопровода. Начальные условия получены из решения задачи вынужденных колебаний этого же участка газопровода, которые обусловлены движением очистного (диагностического) поршня внутри газопровода. Такая задача была решена ранее при использовании интегрального преобразования Лапласа с учетом начального прогиба участка газопровода под действием его собственного веса. Полученное решение этой задачи представляет собой сумму двойных интегралов и нескольких простых слагаемых. Искомое решение задачи свободных колебаний надземной участка газопровода представлено в виде произведения двух функций. Первая из них является функцией только координаты газопровода, а вторая – функцией времени. Первая функция представляет собой сумму произведений неизвестных коэффициентов, которые определялись через известные граничные условия задачи и функций Крылова, в которые входят корни характеристического уравнения. Она является собственной функцией и характеризует форму свободных колебаний участка газопровода. Таких функций существует безграничное количество, поскольку имеется безграничное количество корней частотного уравнения. Во второй функции при косинусах и синусах стоят неизвестные коэффициенты, которые определяются при использовании заданных начальных условий задачи. Определение этих коэффициентов связано с нахождением интегралов от произведения функций начальных условий и собственных функций. Так как функции начальных условий задачи являются сложными и представляют собой сумму двойных интегралов и нескольких простых функций, то с целью облегчения вычисления указанных коэффициентов использовано интерполяционные многочлены Лагранжа. На длине участка газопровода 100 м числовые значения интерполяционных многочленов совпадают с функциями начальных условий в 12 точках (включая и крайние точки 0 и 100 м).*

Ключевые слова: свободные колебания, надземный участок газопровода, собственные функции, корни характеристического уравнения, интерполяционные многочлены Лагранжа.

The authors solve the boundary-value problem regarding the identification of the free vibrations of the above-ground section of the gas pipeline which are caused by the passage of the cleaning (diagnostic) piston. The boundary conditions in this problem correspond to the pinching of the ends of the pipeline section. The initial conditions are derived from the solution of the problem of forced vibrations of the same aboveground section of the gas pipeline, which are caused by the movement of the cleaning (diagnostic) piston inside the pipeline. This problem was solved earlier when using the Laplace integral transform, taking into account the initial deflection of the pipeline section under its own weight. The obtained solution of this problem is the sum of double integrals and several simple summands. The desired solution to the problem of free vibrations of the aboveground section of the gas pipeline is presented as the product of two functions. The former is a function of the pipeline coordinates only, and the later is a function of time. The first function is the sum of the products of unknown coefficients which have been identified using the known boundary conditions of the problem and Krylov functions which include the roots of the characteristic equation. It is a fundamental function which characterizes the mode of free vibrations of the pipeline section. There is a unlimited number of such functions, since there is an infinite number of roots of the frequency equation. In the second function, the cosines and sines have unknown coefficients, which are calculated by using the given initial conditions of the problem. The calculation of these coefficients is based on identifying the integrals of the product of the functions of the initial problem situations and fundamental functions. Since the functions of the initial conditions of the problem are complex and represent the sum of double integrals and some simple functions, Lagrange interpolation polynomials are used to facilitate the calculation of the mentioned coefficients. At the pipeline section which is 100 m long the numerical values of the interpolation polynomials coincide with the functions of the initial conditions at 12 points (including the extreme points 0 and 100 m).

Keywords: free vibrations, aboveground pipeline section, fundamental functions, roots of characteristic equation, Lagrange interpolation polynomials.

**Вступ.** Рух поршня надземною ділянкою магістрального газопроводу супроводжується значними коливаннями, зумовленими значною масою поршня та його нерівномірним рухом. Ці коливання викликають у тілі труб газопроводу додаткові динамічні напруження, які можуть призвести до виникнення аварійних ситуацій, що проявляються у порушенні міцності і стійкості ділянки переходу. Тому задача дослідження механічних коливань надземних ділянок магістральних газопроводів тісно пов'язана з проблемою надійності експлуатації газотранспортної системи загалом.

Останніми роками зростає кількість наукових досліджень, в яких розглядається вплив рухомих і нерухомих мас на трубопровід [1, 2, 3]. Відомі роботи з математичного моделювання згинних коливань трубопроводів і їх модального аналізу, викликаних рухом діагностичного поршня [4, 5, 6]. Крім того, моделювання коливань відкритої ділянки газопроводу, спричинених рухомим інтелектуальним поршнем, розглядається на різних міжнародних конференціях [7, 8, 9]. В роботі [10] розв'язана математична задача з визначення вимушених згинних коливань прямолінійної надземної ділянки магістрального газопроводу, що виникають під час руху очисного поршня.

**Метою** даної роботи є аналітичне визначення вільних коливань надземної ділянки газопроводу після проходження очисного поршня. Це означає, що за початкові умови задачі про вільні коливання ділянки газопроводу потрібно прийняти переміщення і швидкості то-

чок осі ділянки газопроводу в момент, коли поршень знаходиться в кінці ділянки газопроводу.

**Аналіз сучасних досліджень і публікацій.** Вплив нерухомих навантажень на трубопровід розглянуто в [1, 2]. Відцентрова сила інерції, що виникає під час руху поршня в трубопроводі, який укладено за схемою пружновикривленого трубопроводу, визначається в роботі [3], тут же розглядається її вплив на надійність балкового переходу. Однак, додаткові прогини, які виникають під час руху діагностичного поршня, не визначаються.

Роботи [4, 5, 6] пов'язані з математичним моделюванням згинних коливань трубопроводів під час руху ним діагностичних поршнів. В [4] поперечні коливання прямолінійної ділянки трубопроводу знаходять методом загальних переміщень, згідно з яким передбачається задання форм коливань трубопроводу відповідно до крайових умов. Рівняння руху записані з використанням рівнянь Лагранжа другого роду. Задача зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь. Математичне моделювання коливань надземної секції трубопроводу при використанні теорії Тимошенка – предмет дослідження в [5]. Поперечні коливання декількох секцій надземного трубопроводу під впливом руху діагностичного поршня розглянуто в роботах [6, 9]. Про врахування пружної взаємодії між інтелектуальним поршнем і трубопроводом при моделюванні його коливань йдеться в [7, 8].

У всіх названих роботах не приймається до уваги початковий прогин ділянки трубопроводу, викликаний його власною вагою, який може бути значно більшим прогинів, що викликаються рухом поршня. В [10] розв'язана крайова задача з визначення вимушених поперечних коливань надземної ділянки газопроводу внаслідок руху ним очисного поршня. Кінці ділянки газопроводу прийнято защемленими, також враховувався початковий прогин осі ділянки газопроводу від власної ваги. У диференціальному рівнянні рух очисного поршня описано за допомогою дельта-функції Дірака. Задача розв'язувалася методом інтегрального перетворення Лапласа, не враховувалися сили інерції поршня.

**Постановка задачі і методи дослідження.** Як і в роботі [10], ділянку газопроводу розглядаємо як балку, кінці якої защемлено (рис. 1). Диференціальне рівняння вільних коливань відоме в літературі [11, 12, 13]. Додаючи до нього початкові та граничні умови, отримуємо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (a^2 = \frac{EI}{\rho A}), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

де  $u$  - прогин осі балки (осі газопроводу) у довільному перерізі  $x$ ;

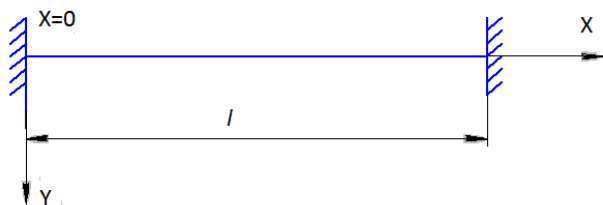
$x, t$  - координата балки і час від початку вільних коливань;

$E$  - модуль пружності матеріалу балки, Па;

$I$  - осьовий момент інерції поперечного перерізу балки,  $m^4$ ;

$A$  - площа поперечного перерізу балки  $m^2$ ;

$\rho$  - густина матеріалу балки,  $кг/м^3$ .



**Рисунок 1 – Схема відкритої ділянки газопроводу, кінці якої защемлено**

Рівняння (2) представляє собою початкові умови задачі. Функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  отримані у результаті розв'язування задачі вимушених коливань надземної ділянки газопроводу, що викликані проходженням ділянкою очисного поршня [10]. Ці функції мають вигляд

$$f_1(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) + \frac{200qa^2}{EI} + \frac{a^3G}{EIv^3} \left[ \frac{v^2}{a} \left( 20 - \frac{x}{v} \right) - \sin \frac{v^2}{a} \left( 20 - \frac{x}{v} \right) \right] \eta \left( 20 - \frac{x}{v} \right) - \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \frac{qa^2}{EI} \int_0^{20} \tau \sqrt{\tau} \int_0^{\infty} f(y, \tau) f_1^*(y, x) dy d\tau - \frac{4a^2G}{\pi\sqrt{\pi}EIv} \int_0^{20} \left[ \sqrt{\tau} - \frac{\sqrt{a}}{v} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \left( \sin \frac{v^2\tau}{a} S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) + \cos \frac{v^2\tau}{a} C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) \right) \right] \times \int_0^{\infty} f(y, \tau) f_1^*(y, x) dy d\tau + \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \frac{qa^2}{EI} \times \int_0^{20} \tau \sqrt{\tau} \int_0^{\infty} f(y, \tau) f_2^*(y, x) dy d\tau + \frac{4a^2G}{\pi EI v} \int_0^{20} \left[ \sin \frac{v^2\tau}{a} C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) - \cos \frac{v^2\tau}{a} S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) \right] \times \int_0^{\infty} \frac{f(y, \tau)}{y} f_3^*(y, x) dy d\tau, \quad (4)$$

де  $q$  – інтенсивність розподіленого навантаження (вага одиниці довжини газопроводу,  $H/м$ );

$G$  – вага вантажу, що рухається балкою,  $H$ ;

$v$  – швидкість руху очисного поршня,  $м/с$ ;

$\eta \left( 20 - \frac{x}{v} \right)$  – функція Хевісайда [14];

$S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right), C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right)$  – відповідно синус-інтеграл Френеля і косинус-інтеграл Френеля [15]

$$S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{v-\sqrt{\tau}}{\sqrt{2a}}} \sin z^2 dz,$$

$$C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{v-\sqrt{\tau}}{\sqrt{2a}}} \cos z^2 dz;$$

$$f(y, \tau) = \frac{e^{-y^2(t-\tau)}}{\left( 2 + 4 \sin^2 \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) e^{\frac{2yl}{\sqrt{2a}}} - \left( 1 + e^{\frac{4yl}{\sqrt{2a}}} \right)};$$

$$\begin{aligned}
 f_1^*(y, x) = & \left(1 + 2 \sin^2 \frac{yl}{\sqrt{2a}}\right) \left( e^{-\frac{y(2l-x)}{\sqrt{2a}}} + e^{-\frac{y(2l+x)}{\sqrt{2a}}} \right) \times \\
 & \times \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} - e^{-\frac{y(4l-x)}{\sqrt{2a}}} \left( \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} - \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right) + \\
 & + e^{-\frac{y(2l-x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} - \left( \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} + \cos \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \right) \times \right. \\
 & \times \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \left. \right] - e^{-\frac{y(2l+x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \right. \\
 & \left. + \left( \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} - \cos \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] - \\
 & - e^{-\frac{yx}{\sqrt{2a}}} \left( \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right); \\
 f_2^*(y, x) = & e^{-\frac{y(l-x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \left( \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} + \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \right. \\
 & \left. + \left( \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} - \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] - e^{-\frac{y(l+x)}{\sqrt{2a}}} \times \\
 & \times \left[ \left( \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} + \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \right. \\
 & \left. + \left( \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} + 3 \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] + \\
 & + e^{-\frac{y(3l-x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \left( \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} - \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \right. \\
 & \left. + \left( \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} - 3 \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] + \\
 & + e^{-\frac{y(3l+x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \left( \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} - \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} + \right. \\
 & \left. + \left( \sin \frac{yl}{\sqrt{2a}} + \cos \frac{yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right]; \\
 f_3(y, x) = & -e^{-\frac{yx}{\sqrt{2a}}} \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} + e^{-\frac{y(2l-x)}{\sqrt{2a}}} \times \\
 & \times \left[ \left( 1 - \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} + 2 \sin^2 \frac{yl}{\sqrt{2a}} \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] + \\
 & + e^{-\frac{y(2l+x)}{\sqrt{2a}}} \left[ \left( 1 + \sin \frac{2yl}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}} - \right. \\
 & \left. - 2 \sin^2 \frac{yl}{\sqrt{2a}} \cos \frac{yx}{\sqrt{2a}} \right] - e^{-\frac{y(4l-x)}{\sqrt{2a}}} \sin \frac{yx}{\sqrt{2a}}; \\
 f_2(x) = & \frac{20qa^2}{EI} + \frac{a^2G}{EIv} \left[ 1 - \cos \frac{v^2}{a} \left( 20 - \frac{x}{v} \right) \right] \times \eta \left( 20 - \frac{x}{v} \right) - \\
 & - \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \frac{qa^2}{EI} \int_0^{20} \tau \sqrt{\tau} \int_0^{\infty} f^*(y, \tau) f_1^*(y, x) dy d\tau - \\
 & - \frac{4a^2G}{\pi\sqrt{\pi}EIv} \int_0^{20} \left[ \sqrt{\tau} - \frac{\sqrt{a}}{v} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \right. \\
 & \times \left( \sin \frac{v^2\tau}{a} S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) + \cos \frac{v^2\tau}{a} C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) \right) \left. \right] \times \\
 & \times \int_0^{\infty} f^*(y, \tau) f_1^*(y, x) dy d\tau + \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \frac{qa^2}{EI} \times \\
 & \times \int_0^{20} \tau \sqrt{\tau} \int_0^{\infty} f^*(y, \tau) f_2^*(y, x) dy d\tau + \\
 & + \frac{4a^2G}{\pi EIv} \int_0^{20} \left[ \sin \frac{v^2\tau}{a} C \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) - \cos \frac{v^2\tau}{a} S \left( \frac{v\sqrt{\tau}}{\sqrt{a}} \right) \right] \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{f^*(y, \tau)}{y} f_3^*(y, x) dy d\tau; \quad (5) \\
 & f^*(y, \tau) = -y^2 f(y, \tau).
 \end{aligned}$$

Крайову задачу (1), (2), (3) в даній роботі розв'язуємо аналітичним методом.

**Основна частина.** Розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді

$$u = z(B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t), \quad (6)$$

де  $z$  – функція координати  $x$  балки, що визначає власну форму коливань балки (ділянки газопроводу) [12, 13]. Після підстановки (6) у рівняння (1) одержуємо звичайне однорідне диференціальне рівняння четвертого порядку. В результаті його розв'язання отримаємо

$$z = C_1 K_1(\alpha x) + C_2 K_2(\alpha x) + C_3 K_3(\alpha x) + C_4 K_4(\alpha x), \quad (7)$$

де  $C_i, i = 1, 2, 3, 4$  – постійні величини;

$$\alpha^4 = \frac{A\rho\omega^2}{EI};$$

$K_i(\alpha x)$  – функції Кривола [12].

При цьому

$$\begin{aligned}
 K_1(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch\alpha x + \cos \alpha x), \\
 K_2(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh\alpha x + \sin \alpha x), \\
 K_3(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch\alpha x - \cos \alpha x), \\
 K_4(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh\alpha x - \sin \alpha x). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Для випадку заземлених кінців газопроводу маємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} z|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_{x=0} = 0, \\ z|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи (7) у граничні умови (9), отримуємо  $C_1 = C_2 = 0$  і два однорідних рівняння

$$\begin{aligned} C_3 K_3(\alpha l) + C_4 K_4(\alpha l) = 0, \\ C_3 K_2(\alpha l) + C_4 K_3(\alpha l) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Із рівнянь (10) одержуємо

$$K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda) K_4(\lambda) = 0, \quad (11)$$

де  $\lambda = \alpha l$ .

Враховуючи вирази для функцій Кривола (8), із (11) виведемо частотне рівняння нашої задачі

$$ch\lambda \cos \lambda = 1. \quad (12)$$

Рівняння (12) має безліч коренів. Згідно з [12] корені рівняння (12) можна записати так:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{3\pi}{2} + \zeta_1, \quad \lambda_2 = \frac{5\pi}{2} - \zeta_2, \dots, \\ \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} - (-1)^k \zeta_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Величини  $\zeta_k$  є малими відносно до  $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ , при цьому зі збільшенням  $k$  модуль величини  $\zeta_k$  зменшується. Корені  $\lambda_k$  можна визначити на комп'ютері методом послідовних наближень.

Знайдемо власну функцію вільних коливань відкритої ділянки газопроводу. Покладемо у першому рівнянні (10)  $C_3 = K_4(\lambda)$ , тоді  $C_4 = -K_3(\lambda)$ . Враховуючи (7), отримуємо  $k$ -ту власну функцію у вигляді

$$z_k = K_4(\lambda_k) K_3\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) - K_3(\lambda_k) K_4\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right). \quad (14)$$

Беручи до уваги аналітичний вираз для  $\alpha$ , кутова частота послідовних форм коливань набуває вигляд

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{A\rho}}. \quad (15)$$

Підставляємо (14) у загальний розв'язок задачі (6) і враховуємо той факт, що власних функцій є безмежна кількість, одержуємо розв'язок задачі у такому вигляді:

$$\begin{aligned} u = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ K_4(\lambda_k) K_3\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) - K_3(\lambda_k) K_4\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) \right] \times \\ \times (B_{1k} \cos \omega_k t + B_{2k} \sin \omega_k t). \end{aligned} \quad (16)$$

Коефіцієнти  $B_{1k}$  і  $B_{2k}$  знаходимо, користуючись початковими умовами (2)

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ K_4(\lambda_k) K_3\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) - \right. \\ &\quad \left. - K_3(\lambda_k) K_4\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) \right] B_{1k}, \\ f_2(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ K_4(\lambda_k) K_3\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) - \right. \\ &\quad \left. - K_3(\lambda_k) K_4\left(\frac{\lambda_k}{l} x\right) \right] \omega_k B_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Множимо обидві частини рівнянь (17) на  $z_i$  і інтегруємо в межах від нуля до  $l$ . Оскільки власні функції ортогональні [11], то на основі властивостей цих функцій будемо мати

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l f_1(x) z_1(x) dx &= \int_0^l B_{1i} z_i^2(x) dx, \\ \int_0^l f_2(x) z_1(x) dx &= \int_0^l \omega_i B_{2i} z_i^2(x) dx, \end{aligned} \right\}; \quad (18)$$

$$B_{1i} = \frac{\int_0^l f_1(x) z_1(x) dx}{\int_0^l z_i^2(x) dx}, \quad B_{2i} = \frac{\int_0^l f_2(x) z_1(x) dx}{\omega_i \int_0^l z_i^2(x) dx}. \quad (19)$$

Як видно із рівностей (19) для знаходження коефіцієнтів  $B_{1i}$  і  $B_{2i}$ , необхідно в першу чергу знайти інтеграл  $\int_0^l z_i^2(x) dx$ . Цей інтеграл

можна обчислити, якщо врахувати властивість власних функцій. Для випадку заземлення кінців надземної ділянки газопроводу величина цього інтеграла матиме вигляд

$$\int_0^l z_i^2(x) dx = \frac{l}{4} \left[ K_4(\lambda_i) K_1(\lambda_i) - K_3(\lambda_i) K_2(\lambda_i) \right]^2. \quad (20)$$

Проблемою є обчислення інтегралів, які стоять у чисельнику формул (19). Це пов'язано зі складними виразами функцій  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$ , що представляють початкові умови задачі (формули (4) і (5)). Для вирішення цієї проблеми використовуємо інтерполяційну формулу Лагранжа [16]. Попередньо обчислюємо значення функцій  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  у вузлах інтерполяції. Довжина надземної ділянки газопроводу  $l = 100$  м. Вузли інтерполяції вибираємо такі:  $x = 0; 1; 5; 10; 20; 40; 60; 80; 90; 95; 99; 100$  м. Застосування інтерполяційного многочлена Лагранжа забезпечує значне спрощення обчислення інтегралів, що стоять у чисельнику формул

(19), оскільки функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  замінюються многочленами.

### **Висновки**

Отримано розв'язок крайової задачі з визначення вільних коливань осі газопроводу на відкритій його ділянці після проходження поршня (очисного, діагностичного) за граничних умов, що відповідають защемленню його кінців.

Початкові умови задачі – це переміщення і швидкість точок осі газопроводу в момент, коли поршень досягає кінця ділянки газопроводу. Вказані умови отримано в результаті розв'язку задачі вимушених коливань газопроводу, спричинених проходженням очисного поршня. В такій задачі була врахована тільки вага поршня і прогин осі газопроводу від власної ваги, але не враховані інерційні сили, які виникають під час руху поршня.

Для полегшення знаходження коефіцієнтів  $B_{1k}$  і  $B_{2k}$ , що входять в розв'язок задачі, за допомогою інтегралів, під знаком яких є функції початкових умов, останні запропоновано подавати як інтерполяційні многочлени Лагранжа.

Використана математична модель дозволяє прогнозувати характер вільних коливань надземної ділянки трубопроводу після руху ним механічних пристроїв, що дає змогу запобігти порушенню стійкості повітряних переходів у процесі очищення чи внутрішньотрубного діагностування.

Перспектива подальшої роботи полягає у виконанні обчислень за результатами розв'язаної задачі, їх аналіз і порівняння з результатами вимушених коливань.

### **Література**

1. Шиян Т.П., Запухляк В.Б., Говдяк Р.М. Вплив тимчасових навантажень від транспортних засобів на трубопровід. *Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ*. 2010. № 4(37). С. 89-91.
2. Дорошенко Я.В., Тихонов С.І. Напружено-деформований стан гнучких висячих переходів трубопроводів. *Науковий вісник ІФНТУНГ*. 2010. № 3. С.106-110.
3. Дорошенко Я.В., Дорошенко Ю.І. Дослідження впливу руху поршня на надійність балкового переходу, прокладеного за схемою пружно викривленого трубопроводу. *Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ*. 2011. № 3. С. 49-51.

4. Теслюк В.М., Харченко Л.Є.. Математичне моделювання згинних коливань прямолінійної ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня. *Моделювання та інформаційні технології: збірник наукових праць*. 2013. Вип. 69. С. 126-135.

5. Kharchenko L. Modal analysis of above-ground pipeline section based on S.Timoshenko beam Theory. *Energia w Nauce I Technice. Bialostockiej*. 2014. P.25-41.

6. Kharchenko L., Kharchenko Y. Fluctuation of multi-section aboveground pipeline region under the influence of moving diagnostic piston/ *Vibration in Pphysical Systems*. 2014. V.26. P.105-112.

7. Теслюк В.М., Харченко Л.Є. Моделювання коливань ділянки трубопроводу з урахуванням пружної взаємодії з рухомим інтелектуальним поршнем. *11-тий Міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: тези доповідей*. Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2013. С. 89-90.

8. Teslyuk V., Kharchenko L. Modeling of pipeline vibrations during the movement of cleaning piston. *The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM): XII-th Internations Conference*. Polyana, 2013. P.362-363.

9. Харченко Л.Є. Математичне моделювання коливань багатопрогонової балки зі змінними пружно-інерційними характеристиками та з рухомим вантажем. *Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем: II Міжнародна науково-практична конференція*. Кіровоград: Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, 2013. С. 245.

10. Грудз В.Я., Запухляк В.Б., Тутко Т.Ф., Дубей О.Я. Оцінка динамічних навантажень в розрахунках надземних ділянок газопроводів. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2018. № 5(140). С. 85-91.

11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.

12. Филиппов А.П. Колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1965. 716 с.

13. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 480 с.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

16. Демидович Б.П., Марон И.А.. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

### References

1. Shiyan T.P., Zapuhlyak V.B., Govdyak R.M. Vpliv timchasovih navantazhen vid transportnih zasobiv na truboprovod. *Rozvidka i rozrobka naftovih i gazovih rodovish.* 2010. No 4(37). P. 89-91.

2. Doroshenko Ya.V., Tihonov S.I. Napruzhenno-deformovaniy stan gnuchkih visyachih perehodiv truboprovodiv. *Naukovij visnik IFNTUNG.* 2010. No 3. P. 106-110.

3. Doroshenko Ya.V., Doroshenko Yu.I. Doslidzhennya vplivu ruhu porshnya na nadijnist balkovogo perehodu, prokladeno go za shemoyu pruzhno vikrivlenogo truboprovodu. *Rozvidka i rozrobka naftovih i gazovih rodovish.* 2011. No 3. P. 49-51.

4. Teslyuk V.M., Harchenko L.Ye.. Matematichne modelyuvannya zginnyh kolivan pryamolinijnoyi dilyanki truboprovodu pid diyeyu ruhomogo diagnostichnogo porshnya. *Modelyuvannya ta informacijni tehnologiyi: zbirnik naukovih prac.* 2013. Vyp. 69. P. 126-135.

5. Kharchenko L. Modal analysis of above-ground pipeline section based on S.Timoshenko beam Theory. *Energia w Nauce I Technice. Bialostockiej.* 2014. P. 25-41.

6. Kharchenko L., Kharchenko Y. Fluctuation of multi-section aboveground pipeline region under the influence of moving diagnostic piston. *Vibration in Pysical Systems.* 2014. V.26. P. 105-112.

7. Teslyuk V.M., Harchenko L.Ye. Modelyuvannya kolivan dilyanki truboprovodu z urahuvannyam pruzhnoyi vzayemodiyi z ruhomim intelektualnim porshnem. *11-tij Mizhнародnij simpozium ukrayinskih inzheneriv mehanikiv u Lvovi: tezi dopovidej.* Lviv: KINPATRI LTD, 2013. P. 89-90.

8. Teslyuk V., Kharchenko L. Modeling of pipeline vibrations during the movement of cleaning piston. *The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM): XII-th Internations Conference.* Polyana, 2013. P.362-363.

9. Harchenko L.Ye. Matematichne modelyuvannya kolivan bagatoprogonovoyi balki zi zminnimi pruzhno-inercijnimi karakteristikami ta z ruhomim vantazhem. *Upravlinnya visokoshvidkislunimi ruhomimi obyektami ta profesijna pidgotovka operatoriv skladnih sistem: II Mizhнародna naukovo-praktichna konferenciya.*

Kirovograd: Kirovogradska lotna akademiya Nacionalnogo aviacijnogo universitetu, 2013. P. 245.

10. Grudz V.Ya., Zapuhlyak V.B., Tutko T.F., Dubej O.Ya. Ocinka dinamichnih navantazhen v rozrahunkah nadzemnih dilyanok gazoprovodiv. *Visnik Vinnickogo politehnicnogo institutu.* 2018. No 5(140). P. 85-91.

11. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele. M.: Fizmatgiz, 1959. 439 p.

12. Filippov A.P. Kolebaniya mehanicheskikh sistem. Kiev: Naukova dumka, 1965. 716 p.

13. Biderman V.L. Teoriya mehanicheskikh kolebanij. M.: Vysshaya shkola, 1980. 480 p.

14. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, 1970. 720 p.

15. Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i prizvedenij. M.: Nauka, 1971. 1108 p.

16. Demidovich B.P., Maron I.A.. Osnovy vychislitelnoj matematiki. M.: Nauka, 1970. 664 p.